|  |  |
| --- | --- |
| Título del guion | Las integrales |
| Código del guion | MA\_11\_05\_CO |
| Descripción | Con la aplicación de las integrales podrás modelar situaciones que muestran variaciones con respecto al tiempo o a otras variables y calcular el área y el volumen de formas regulares e irregulares. |

**[SECCIÖN 1] 1. La antiderivada**

A lo largo de tu aprendizaje en el área has estudiado las operaciones aritméticas y conoces que para cada una de ellas se determina su inversa. Por ejemplo, la inversa de la adición es la sustracción, de la multiplicación es la división, de la potenciación es la radicación. En cada caso, la segunda operación “deshace” a la primera y viceversa. El interés de estos procesos de operaciones inversas radica en la utilidad que tienen para solucionar ecuaciones. Si queremos resolver ecuaciones que incluyan derivadas, necesitaremos su inversa, denominada antiderivación. En este capítulo, veremos este proceso, inverso a la derivación, es decir, dada la derivada *f’* (*x*), hallar la función *f*(*x*). Así, una derivada tendrá su correspondiente antiderivada.

**La antiderivada**

Una función *F*(*x*) definida en un intervalo, es una**antiderivada**de otra función *f*(*x*) en ese intervalo, si cumple que *F’* (*x*) = *f*(*x*), para todo *x* que pertenezca al intervalo.

**[SECCIÖN 2] 1.1 La primitiva de una función**

La antiderivada de una función también se conoce con el nombre de **primitiva de la función** y consiste en determinar la función original *F*(*x*) conociendo su función derivada *F’*(*x*).

Una particularidad de las antiderivadas es que no son únicas. Pues si recordamos la derivada de una función constante es cero, entonces si *F*(*x*) es una antiderivada de *f*(*x*), también lo es *G*(*x*)*,* definida por *G*(*x*) *= F*(*x*) *+ C*, para cualquier número *C.*

Por ejemplo, si *f*(*x*) = 4*x*³, entonces las funciones definidas por las expresiones *G*(*x*) = *x*4 + 3, *H*(*x*) = *x*4 + √2, entre otras, son antiderivadas de *f*(*x*).

En general, si *F*(*x*) es una antiderivada de *f*(*x*), en un intervalo, entonces cualquiera otra antiderivada de *f*(*x*) tiene la forma *F(x) + C* donde *C* es una constante arbitraria.

Así que, si una función *f* tiene una antiderivada, tendrá una familia de ellas, y cada miembro de esta familia puede obtenerse de uno de ellos mediante la suma de una constante adecuada.

La función *F*(*x*) *+ C* se llama la antiderivada general de *f*(*x*)*.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_CO\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** | Representaciones de distintas antiderivadas *F´*(*x*) = 4*x*3 |
| **Ubicación del pie de imagen** | Lateral |

Ejemplo

Hallar una primitiva *F* de la función *G*(*x*) = *x*4 + 3.

Anteriormente se dedujo que *F*(*x*) = 4*x*³es una primitiva de *G*(*x*)*,* ya que la derivada de *G*(*x*) es igual a *f*(*x*)*.*

Luego *F*(*x*) = 4*x*³ + 4

Ejemplo

Si *f*(*x*) = cos3*x* + 2*x*, definir la primitiva *F* de la función *f*

Se calcula la derivada implícita de *f*.

Si *f*(*x*) = cos3*x* + 2*x* entonces *F*(*x*) = (–sen 3x)(3) + 2 = –3(sen 3x) + 2

**[SECCIÖN 2] 1.2 La integral indefinida**

Las antiderivadas de una función forman una familia de funciones cuya representación gráfica se diferencia una de otra solamente en un número.

**La integral indefinida**

Al conjunto de todas las antiderivadas de una función *f*(*x*) se le llama **integral indefinida** de *f*(*x*), y se representa como

ʃ *f*(*x*)*dx*

Se lee **la integral** **indefinida** de *f*(*x*) respecto a *x*.

Por ejemplo, si *f*(*x*) = *y* = *x*2*+ x –* 2, entonces *f´(x) = dy = (*2*x* + 1)*dx* y la integral indefinida es:

ʃ *dy/dx* = ʃ (2*x* + 1)d*x*

Luego, se puede concluir que

ʃ *f*(*x*)*dx* = *F*(*x*) + *C*

*C* es llamada la **constante de integración**.

**[SECCIÖN 3] 1.2.1 Propiedades de la integral indefinida**

Si *f(x)* y *g(x)* son dos funciones que tienen integral indefinida, y *k* es una constante, entonces.

*ʃ (f(x) + g(x)) dx = ʃ (f(x)dx + ʃ (g(x)dx*

*ʃ (f(x) – g(x)) dx = ʃ (f(x)dx – ʃ (g(x)dx*

*ʃ kf*(*x*)*dx = k ʃ f*(*x*)*dx*

A partir de la tabla de derivación se puede obtener una serie de integrales llamadas **integrales inmediatas**, es decir aquellas que se pueden determinar directamente, sin necesidad de realizar ningún cambio o transformación. Por ejemplo:

* La integral de la **función nula** *f(x) = 0, es*

*ʃ f(x)dx = ʃ0dx = 0 ʃdx = C*

* La integral de la **función constante** *f(x) = k, es*

*ʃ f(x)dx = k ʃdx = kx + C*

* La integral de la **función *f*(*x*) *= x****,* es

*ʃ f*(*x*)*dx = ʃxdx = x2 /2 + C*

La integral de la **función *f*(*x*) *= 1 es***

*ʃdx = x + C*

* La integral de **la función potencia *f*(*x*) *= xn****, con n ≠ - 1,* es

*ʃ f(x)dx = ʃx dx = xn +1/(n + 1) + C*

Veamos como descomponer algunas integrales en otras más sencillas aplicando las integrales inmediatas dadas.

Para cada caso resolver las integrales.

1. 4 – 5*x*2 + 3)*dx*

4 – 5x2 + 3)*dx* = 4*dx* – x2*dx* + *dx*

= *x*5/5 + *C*1 – 5*x*3/3 + *C*2 + 3*x* + *C*3

Por tanto,

4 – 5*x*2 + 3)*dx* = *x*5/5 - 5*x*3/3 + 3*x* + *C*

1. ʃ(7*x*3 – 2*x*)*dx*

ʃ (7*x*3 – 2*x*)*dx =* 3*dx* –

Luego,

ʃ (7*x*3 – 2*x*)*dx* =7/4*x*4 – *x*2 + *C*

1. 3/2 – 3*u* +10)*du*

3/2 – 3*u* +10)*du* = 3/2 *du* – 3 + 10

Entonces,

3/2 – 3*u* +10)*du* = 2/5*u*5/2 – 3/2*u*2 +10*u* + *C*

1. *dx*

*dx = –*

*– =*

=

= 3 + *C*

3 + *C =*  4 + *C*

Finalmente,

*dx =*  4 + *C*

5. Determinar *f*(*x*) para la cual su derivada es la función *f’*(*x*) = *x*2 – 3*x* + csc2 *x.*

Por tanto, se concluye que

A continuación se presenta una primera lista de primitivas inmediatas que surgen directamente de derivadas ya conocidas.

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones algebraicas** |
|  |

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones trascendentes** |
|  |

|  |
| --- |
| **Primitiva de funciones trigonométricas** |
|  |

**Ejemplo.** Usando la tabla de integrales inmediatas, encontrar la integral indefinida de cada función.

1. 2 + 2/*x*3)*dx*

2 + 2/*x*3)*dx* = 2 *dx* + 3 *dx*

= -2 *dx* + -3 *dx* = –*x*-1 – 2*x*-2/2 + *C*

Por tanto,

2 + 2/*x*3)*dx* = –1/*x* – 1/*x*2 + C

1. *dx*

*dx* = 1/2 *dx* = 3 *x* 3/2/ 3/2 + C

Se concluye que:

*dx* = 2*x*3/2 + *C* = 2*x*√*x* + *C*

1. 2*x*) *dx*

2*x*) *dx*= + 2*x* *dx* = sen *x* + tan *x* + *C*

Por tanto, se obtiene:

2*x*) *dx* = sen *x* + tan *x* + *C*

**[SECCIÖN 3] 1.2.2 Soluciones particulares**

Se ha dicho que las antiderivadas de una función forman una familia de funciones, cuyas soluciones se diferencian una de otra solamente por la constante de integración *C*.

Por ejemplo, la integral de la función *f*(*x*) *=* 5*x*2 + 2*x* – 3 es

ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3)*dx* = ʃ 5*x*2d*x* + ʃ 2*xdx* - ʃ 3*dx*

ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3)*dx* = 5*x*3/3 + 2*x*2/2 – 3*x* + *C*

Finalmente,ʃ (5*x*2 + 2*x* – 3)*dx* = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x* + *C*

Si se sustituye el valor de *C* por distintos valores, se obtienen algunas integrales de la función *f*(*x*) dada.

Ahora, si el planteamiento del ejercicio brinda información adicional, es posible obtener una solución particular de una integral dada. A este tipo de información se le llama **condición inicial.** Una condición inicial se da cuando se conoce el valor de *F(x)* para un valor *x* dado.

Por ejemplo, calcular una solución particular para

*F*(*x*) = (5*x2* + 2*x* – 3)*dx* si *F*(0) = 2.

En este caso, la solución particular determina que si

*F*(*x*) = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x + C*

Entonces

2 = 5/3(0)3 + (0)2 – 0 + *C*

De donde se obtiene que *C* = 2.

Así, la solución particular para la integral es

*F*(*x*) = 5/3*x*3 + *x*2 – 3*x* + 2

Al igual que la derivación, la integración resulta un método útil para encontrar la ecuación de una recta o solucionar problemas de física o de otras áreas.

Veamos:

<

Así, si una partícula se mueve en línea recta, la función de posición *s(t)* es una antiderivada de su función de velocidad *v(t);* es decir, *s’(t) = v(t).*

Igualmente, como la velocidad es una antiderivada de la aceleración, se tiene que *v’(t) = a(t).*

Teniendo condiciones iníciales, puede determinarse la función de posición de una partícula a partir de la función de aceleración de la partícula.

|  |  |
| --- | --- |
| **Profundiza (recurso de exposición)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_REC50 |
| **Título** | El estudio de las integrales |
| **Descripción** | Interactivo en el que se exponen distintas formas de comprender la integral |

**1.3 CONSOLIDACIÓN**

Actividades para consolidar lo que has aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica (recurso de ejercitación)** | |
| **Código** | MA\_11\_05\_REC60 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La antiderivada |
| **Descripción** | Actividad en la que se proponen preguntas abiertas sobre el concepto de "antiderivada |

**2 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN**

Los métodos de integración que se estudian a continuación permiten calcular gran parte de las integrales que se estudian en este capítulo.

**2.1 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN**

La integración por sustitución tiene su fundamento en la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

|  |  |
| --- | --- |
| **Destacado** | |
| **Título** | **Regla generalizada de la potencia** |
| **Contenido** | *Si* F *es una antiderivada de f y g es una función derivable, entonces*,  *ʃ f(g(x))^n g’(x)dx =* F*(f(x))^(n+1)/(n+1) +* C  sustituye a una expresión apropiada en función de *x*, de forma que la integral se transforme en otra integral de variable *u* más fácil de integrar. |

**Ejemplo:** Evalúe

*ʃ* (x^4 + 3x)^5(4x3 + 3) dx

Sea g(x) = x4 + 3x; entonces *g´*(x) = 4x^3 + 3. Así, por la regla generalizada de la potencia

*ʃ* (x^4 + 3x)^5(4x3 + 3) dx = *ʃg*(x)^5*g´*(x) = [g(x)]^6/6 + C

= (x^4 + 3x)^6/6 + C

**Ejemplo**: Evalúe

1. ʃ (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12) dx b) ʃ (x^2 + 4)^10 (2x) dx
2. Sea *u* = x^3 + 6x; entonces *du* = (3x^2 +6) *dx.*

Pero, (6x^2 + 12) = 2(3x^2 +6) = 2*du,* y en consecuencia

ʃ (x^3 + 6x)^5(6x^2 + 12) dx = ʃ *u*^5 2 *du*

= 2 ʃ *u*^5 *du*

= 2[u^6/6 + C]

= 2[(x3 + 6x)6/6 + C]

1. ʃ (x^2 + 4)^10 (2x) dx

Sea *u* = (x2 + 4); entonces *du* = 2x dx, por tanto

ʃ (x^2 + 4)^10 (2x) dx = ʃ u du = u2/2 + C

= (x2 + 4)2/2 + C

Se pueden calcular las integrales usando el método de sustitución o desarrollando el integrando, y observando cómo varían las constantes de integración.

Hemos dicho que la integración resulta útil para resolver problemas de física. En el siguiente ejemplo veremos una aplicación.

**Ejemplo**: Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración a la que cae un objeto, debido a la gravedad, es de 10 metros por segundo por segundo (m/s2), siempre y cuando podamos despreciar la resistencia del aire. Si un objeto se lanza directamente hacia arriba desde una altura inicial de 300 metros a una velocidad de 15 metros por segundo (m/s), encuentre su velocidad y altura 4 segundos después del lanzamiento.

Supongamos que la altura s se considera positiva hacia arriba. Entonces *v = ds/dt* inicialmente es positiva (s está aumentando con relación al punto de lanzamiento), pero *a = dv/dt* es negativa, (la fuerza debida a la gravedad, es descendente, por lo que *v* disminuye).

*dv/dt* = -10

*v* = ʃ - 10 *dt* = - 10 t + C

Como *v* = 15 en *t* = 0, encontramos que C = 15, y así

v= 10*t* + 15

Ahora,  *v = ds/dt* , entonces:

*ds/dt = -*10t + 15

ds = (-10t + 15) dt

Cuando integramos ambos términos obtenemos,

*s =* ʃ ( - 10*t* + 15) *dt*

*s =* - 5 t2 + 15 t + K

Como *s =* 300 en *t =* 0, encontramos que K = 300, por tanto,

s *=* - 5 t2+ 15t + 300

Por último, en *t =* 4,

v *=* - 5(4) + 15 = - 5 m/s

*s =* - 5(4)2 + 15 + 300 = 235 m

Notemos que si *v = vo* y *s = so* en *t =* 0, este procedimiento nos lleva a las conocidas fórmulas de caída libre de un cuerpo.

a *=* - 10

*v = -* 5*t* + *vo*

*s =* - 5*t*2 + *vot + so*

**2.2 INTEGRACIÓN POR PARTES**

El procedimiento de integración por partes tiene su fundamento en la regla de derivación del producto de dos funciones. Así, la derivada de la función *f(x) = u(x) . v(x) es f(x) = u’(x) . v(x) + u(x) . v’(x).*

Al calcular la integral de los dos miembros de la igualdad, resulta

*f’(x) = [u(x) . v(x)]’ = u’(x) . v(x) + u(x) . v’(x)*

ʃ *[u(x) . v(x)]’dx = ʃ [u’(x) . v(x)]dx + ʃ [u(x) . v’(x)]dx*

es decir*, u(x) . v(x) = ʃ [u’(x) . v(x)]dx + ʃ u(x) . v’(x)dx;* de donde se deduce la fórmula para integrar por partes:

[Formula] ʃu(x) . v’(x)dx = u(x) – v(x) - ʃ v(x) . u’(x)dx

Para aplicar este método, hay que descomponer el integrando en el producto de una función *u(x)* por la derivada de otra función *v’(x),* de manera que al obtener *v(x)* resulte que la integral *v(x) . u’(x)dx* se pueda hallar más fácilmente que la integral *u(x) v’(x)dx.*

Ejemplo: hallar ʃ x cos x dx.

Sea *u = x, dv =* cos *x dx,*

entonces

*du = dx, v =* sen x

si reemplazamos en la fórmula tendremos:

ʃ x cos x dx = *x* sen x - ʃ sen x dx

La integral que aparece a la derecha de esta expresión es conocida. Por tanto tenemos

ʃ x cos x dx = x senx + cos x + C.

**Ejemplo**: hallar ʃ x^2 e^x dx.

Sea u = x^2, dv = e^x dx

entonces

du = 2x dx, v = e^x,

y reemplazando tenemos

ʃ x^2 e^x dx = x^2e^x - 2 ʃ xe^x dx (1)

En este caso, la segunda integral es más fácil que la primera, pero necesitamos continuar de la misma manera. Cuando la segunda integral se integra por partes así

u = x, dv = e^x dx

de modo que

du = dx, v = e^x,

entonces obtenemos

ʃ xe^x dx = xe^x – e^x

Reemplazamos en la ecuación (1) y, el resultado final es

ʃ x^2 e^x dx = x^2e^x – 2xe^x + 2 e^x + C

En algunas ocasiones ocurre que la integral con la que comenzamos aparece por segunda vez durante la integración por partes. En este caso es posible resolver la ecuación mediante la aplicación del álgebra elemental. Veamos.

**Ejemplo**: ʃ e^x cos x dx

Por facilidad vamos a denotar la integral por J. Según el proceso de integración por partes,

u = e^x, dv = cos x dx

entonces,

du = e^x dx, v = sen x,

por tanto

J = e^x sen x - ʃ e^x sen x dx (1)

En este punto vemos que el segundo término de la derecha de la igualdad no es más fácil de integrar que la ecuación original, pero podemos aplicar nuevamente la integración por partes. Así

u = e^x, dv = sen x dx

du = e^x dx, v = - cos x

y obtenemos

ʃ e^x sen x dx = - e^x cos x + ʃ e^x cos x dx

Notemos que la integral del segundo miembro es nuevamente J, por tanto podemos escribir

ʃ e^x sen x dx = - e^x cos x + J

Si reemplazamos esta ecuación en la ecuación (1) tenemos,

J = e^x sen x + e^x cos x – J

Es fácil resolver la ecuación para hallar J

2J = e^x sen x + e^x cos x de donde

J = ½(e^x sen x + e^x cos x)

Y lo único que falta es añadir la constante de integración

ʃ e^x cos x dx = 1/2 e^x(sen x + cos x) + C.

**2.3 INTEGRALES DE ALGUNAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

Las fórmulas de las integrales de las funciones seno y coseno se deducen directamente de la derivada.

ʃ *sen x dx = - cos x +* C

ʃ *cos x dx = sen x +* C

En general, el uso eficaz del método de integración por sustitución, depende de la disponibilidad de una lista de integrales conocidas. La lista, que presentamos a continuación, es de gran utilidad para desarrollar integrales, tanto por el método de sustitución, como por el método de integración por partes, que veremos a continuación.

**2.4 CONSOLIDACIÓN.** Actividades para afianzar lo aprendido en esta sección.

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC100 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: Los métodos de integración |
| **Descripción** | Actividad en la que se revisa la claridad en la aplicabilidad de los métodos |

**3 ÁREAS**

**3.1 LA INTEGRAL DEFINIDA**

Es fácil calcular el área de una región plana cuando está limitada por líneas. Por ejemplo, si la región es un rectángulo, un triángulo o cualquier polígono que se pueda dividir en triángulos, existen fórmulas que permiten determinar su área.

Para encontrar áreas de regiones cuyos límites no son rectas, sino gráficas de funciones, es necesario utilizar un proceso que se fundamenta en el concepto del límite.

Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra una región *S* en un plano coordenado, limitada por las rectas verticales que intersecan al eje *x* en el punto *a* y en el punto *b*, por el eje *x* y por la gráfica de la función *y = f(x)*, continua y no negativa en el intervalo *[a, b].*

Como ninguna porción de la gráfica está por debajo del eje *x*, se dice que *S* es la **región bajo la gráfica de f entre a y b.**

Para calcular el área de S, se hace una partición del intervalo[a, b] en partes iguale s, formando rectángulos de igual base. Algunos de estos rectángulos quedan por encima de la curva y otros quedan por debajo de la curva, como se muestra en la figura 1.

La suma de las áreas de los rectángulos de la gráfica, S1, constituye una aproximación por **exceso** del área buscada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG02 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

La suma de las áreas de los rectángulos de la gráfica, S2, constituyen una aproximación por **defecto** del área buscada.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG03 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Si se considera una partición del intervalo [a, b] en partes iguales pero de menor base, se obtiene una aproximación mayor al área buscada.

Luego, el área S de la región bajo la curva, es la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos cuando n (número de rectángulos) es muy grande y su base (∆x) es muy pequeña. Así,

S = Lím [f(x1)∆x + f(x2) . ∆x +… + f(xn) . ∆x]  
 ∆x →0

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG04 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Una función f continua y no negativa tiene área bajo su gráfica si cuando la amplitud de la partición ∆x tiende a cero, entonces el límite de las aproximaciones por exceso es igual al límite de las aproximaciones por defecto.

*Se llama* ***integral definida*** *entre a y b de f(x), y se denota* *ʃab (f(x))dx* al área de la porción de plano limitado por la gráfica de la función *f(x),* el eje *x* y las rectas *x = a* y *x = b.*

Si la integral definida de f desde a hasta b existe, se dice que f es **integrable** en el intervalo cerrado [a, b], o que *ʃab f(x)dx* existe.

A los números a y b se les llama **límites de integración,** en los que a es el límite inferior y b es el límite superior. La función f(x) a la derecha del signo de la integral se llama integrando.

**3.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA**

**Propiedad 1** si la base del área de la región bajo la curva es cero, el área es cero (figura)

*ʃaa f(x)dx = 0.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG05 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**Propiedad 2** El área de la región bajo la curva siempre será positiva si f(x) es positiva.

*ʃab f(x)dx >* 0 ∀ x ∈ [a, b] y f(x) > 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG06 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**Propiedad 3** El área de la región bajo la curva siempre será negativa si f(x) es negativa (figura).

*ʃab f(x)dx <* 0 ∀ x ∈ [a, b] y f(x) < 0.

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG07 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

**Propiedad 4** Si f es una función integrable en un intervalo que contiene los puntos a, b y c, tal que a < b < c, entonces

*ʃab f(x)dx + ʃbc f(x)dx = ʃac f(x)dx* .

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG08 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**Propiedad 5** Si f y g son funciones integrables en [a, b], entonces también lo son f + g y f – g. Así,

*ʃab* [*f(x)* ± g(x)] dx =, ʃab f(x)dx ± , ʃab g(x)dx.

**Propiedad 6** Para toda k constante

ʃab kf(x)dx = k ʃab f(x) dx.

**Propiedad 7** Al intercambiar los límites de integración cambia el signo de la integral.

ʃab f(x)dx = - ʃab f(x)dx.

**Propiedad 8** Si f y g son funciones integrables en [a, b] y si f(x) ≥ g(x) para todo x ∈ [a, b], entonces,

ʃab f(x)dx ≥ ʃab f(x)dx.

**Propiedad 9** Si la función es constante, su integral es el producto de la constante por la diferencia de los límites de integración.

ʃab kdx = k(b – a).

**Ejemplos**. Calcular las integrales definidas de las siguientes funciones:

1. ʃ25 5dx

ʃ25 5dx = 5(5-2) = 15

1. ʃ-23 (1/2)dx

ʃ-23 (1/2)dx = ½(3-(-2)) = ½(3+2) = 5/2

1. Si 3dx = 5 y = 2, entonces calcular 3 – 3x +4) dx

3 – 3x +4) dx = 3dx - +

= 3dx - +

= 5(5) – 3(2) + 4(3-1) = 25 – 6 + 8 = 27

**3.3 CONSOLIDACIÓN.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC140 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El área bajo la curva |
| **Descripción** | Actividades en varios niveles de complejidad respecto a los conceptos estudiados respecto al área bajo la curva |

**4 RELACION ENTRE INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN**

**4.1 PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**

El teorema que se presenta a continuación recibe el nombre de teorema *fundamental del cálculo*, ya que expresa de manera concisa la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

*Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b]. Si F es una función definida por F(x) = ʃax f(x)dx, con a ≤ x ≤ b, entonces F es una antiderivada de f en [a, b]; es decir, F’(x) = f(x) ∀ x ∈ [a, b].*

**4.2 SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**

El teorema que se muestra a continuación, y que puede considerarse como la segunda parte del teorema anterior, puede emplearse para encontrar la integral definida sin usar límites de sumas.

El método se conoce como **regla de Barrow.**

(Recordatorio) Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y si F es una antiderivada de f, entonces ʃab f(x)dx = F(b) – F(a).

Para calcular las integrales definidas usando la regla de Barrow, se pueden seguir los siguientes pasos:

1° Buscar una función F(x), tal que F’(x) = f(x).

2° Evaluar F(x) en los límites de integración, es decir, F(a) y F(b).

3° Calcular la diferencia entre F(b) y F(a), es decir, F(b) – F(a).

**Ejemplo.** Usando la regla de Barrow, evalúe:

1. ʃ-12 (4x -6x2) dx

ʃ-12 (4x -6x2) dx = ʃ-12 4x dx - ʃ-12 6x2 dx = [4/2x2 – 6/3 x3] -12

= (8 – 16) – (2 + 2) = - 12

1. ʃ18 (x1/3 + x4/3) dx.

ʃ18 (x1/3 + x4/3) dx = [3/4 x^4/3 + 3/7 x^7/3] (entre 1 y 8)

= [3/4(16) + 3/7(128)] – [¾(1) + 3/7(1)]

= 45/4 + 381/7

Aquí podemos calcular este valor y obtenemos

≅ 65,68

En ocasiones, es necesario utilizar algunos de los métodos de integración, que ya hemos visto, para calcular la integral definida y aplicar la regla de Barrow.

**Ejemplo.**

1. Evalúe En este caso utilizaremos el método de sustitución así:

Sea u = , entonces du = 2x + 1 por tanto

= = 2/3 u^3/2 + C = [2/3(x^2 + x)^3/2 + C

Entonces, aplicando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo,

= [2/3(x^2 + x)^3/2 + C] (entre 0 y 4)

= [2/3(20)^3/2 + C] – [ 0 + C]

= 2/3[(20)^3/2 ≅ 59,63

**4.3 CONSOLIDACIÓN**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC170 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: La relación entre las derivadas y las integrales |
| **Descripción** | Actividad de afianzamiento de la relación entre las derivadas y las integrales |

**5 CÁLCULO DE ÁREAS**

Una de las aplicaciones de la integral definida es el cálculo del área de una región plana.

*Sea* f *una función continua en el intervalo* [a, b], *tal que* f(x) ≥ 0. *La región limitada por* f(x), x = a, x = b *y el eje x tiene por área*

A =

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG09 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

**Ejemplo**. Hallar el área de cada región y trazar la gráfica.

1. Limitada por x = 1, x = 3 y la función f(x) 0 x2 – x

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG10 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

Entonces, calculamos el área bajo la curva con las condiciones dadas así.

A = = 2 – 1) dx = 2dx - = [ x3/3] (entre 1 y 3) – [x2/2] (entre 1 y 3).

A = 33/3 – 13/3 – ( 32/2 – 12/2) = 9 – 1/3 – 4,5 + ½ = 14/3 u2

u2 (unidades cuadradas, puesto que es área)

Frecuentemente, la función *f* continua, determina dos o más regiones separadas por el eje *x.* En este caso, se calculan las áreas de las regiones por separado, sumando las áreas que están por encima del eje *x* y restando las áreas que resultan debajo del eje *x.*

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG11 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

**Ejemplo.** Encuentre el área de la región determinada por y = x3 + x2 – 5x -3, entre x = -2, x = 2 y el eje x.

Se puede observar en la figura que una parte está arriba del eje *x* y otra está debajo. Estas dos áreas se calculan por separado.

A = A1 - A2

A1= 3 + x2 – 5x -5) dx = [ x4/4 +x3/3 – 5x2/2 – 5x] (entre -2 y -1)

= [(-14/4) – (-24/4)] + [(-13/3) – (-23/3)] – [5(-12/2)– 5(-22/2)] – [5(-1) – 5(-2)]

= - 15/4 + 7/3 + 15/2 – 5 = 13/12

A2 = 3 + x2 – 5x -5) dx = [ x4/4 +x3/3 – 5x2/2 – 5x] (entre -1 y 2)

= [(24/4) – (-14/4)] + [(23/3) – (-13/3)] – [5(22/2)– 5(-12/2)] – [5(2) – 5(-1)]

= -189/12

Por tanto A = A1 – A2  = 13/12 – (-189/12) = 13/12 + 189/12 = 101/6

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG12 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior |

**5.1 CONSOLIDACIÓN**

|  |  |
| --- | --- |
| **Practica: recurso nuevo** | |
| **Código** | MA\_11\_02\_REC200 |
| **Título** | Refuerza tu aprendizaje: El cálculo de áreas |
| **Descripción** | Actividad para revisar concepciones y aplicaciones del cálculo de áreas. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Imagen (fotografía, gráfica o ilustración)** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_IMG01 |
| **Descripción** |  |
| **Código Shutterstock (o URL o la ruta en AulaPlaneta)** |  |
| **Pie de imagen** |  |
| **Ubicación del pie de imagen** | Inferior o lateral |

[SECCIÓN 1]**Fin de unidad**

|  |  |
| --- | --- |
| **Mapa conceptual** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC230 |
| **Título** | Mapa conceptual |
| **Descripción** |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Evaluación: recurso nuevo** | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 |
| **Título** |  |
| **Descripción** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Webs de referencia** | | |
| **Código** | XX\_00\_00\_REC00 | |
| **Web 01** | *Título* | *URL* |
| **Web 02** | *Título* | *URL* |
| **Web 03** | *Título* | *URL* |